数理解析研究所講究録
第 1872 巻 2014 年 108-112

Fusion systems and blocks with non-abelian defect groups

大阪府立大学工業高等専門学校　楢崎 亮 (Ryo Narasaki)
Department of Technological Systems,
Osaka Prefecture University College of Technology

1. はじめに

有限群の表現論において，群 G の表現と G の Sylow p-部分群 P の正規化群 $N_G(P)$ の表現の間の対応に関して，Broué 予想と呼ばれる，P が可換である場合の G と $N_G(P)$ の対応するブロックに含まれる指標や加群の間に深い関係があることを示唆する予想はよく知られている．ここではその中でも，Broué の perfect isometry 予想と呼ばれる，指標の対応についての予想に着目する．とくに，P が非可換でも fusion system が同じという条件のもとで，Broué の予想をふまえてどのようなことが考えられるのかを以下で述べる．

2. Fusion systems

まず始めに fusion system の定義を述べる．G を有限群，p を素数とする．

定義 1. G の Sylow p-部分群 P 上の fusion system $F_P(G)$ とは，P の部分群のすべてを対象とし，$\mathrm{Hom}(Q,R)=\{\varphi_x : Q\to R \mid x\in G, \varphi_x(u)=xux^{-1}\}$ を射の集合とする圏である．

もし，G の部分群 H が P を部分群として持つならば，P は H の Sylow p-部分群であり，$F_P(H)\subseteq F_P(G)$ となる．$F_P(H)=F_P(G)$ が成り立つとき，H は P における G-fusion を control するという．

P が可換な場合，G と $N_G(P)$ の間には次が成り立つ．

定理 2 (Burnside). P が可換ならば，$F_P(G)=F_P(N_G(P))$．すなわち，$N_G(P)$ は P における G-fusion を control する．

Fusion system を調べるうえで，p-群 P を固定したときに，どのような fusion system が存在するのかについての研究が進められている．まず，Ruiz と Viruel による，2004 年に発表された結果を紹介する．位数 p^3，べき数 p の extra special p-群を p_+^{1+2} と書くことにする．

定理 3 (Ruiz-Viruel [12]). p を奇素数とし，$P\cong p_+^{1+2}$ とする．このとき P 上の fusion system は分類される．

この定理の一例として，$p=3$，G を散在型の単純群 J_2，H をその極大部分群の一つである $U_3(3)$ としたとき，$U_3(3)$ は p_+^{1+2} における J_2-fusion を control する．

また，H が G の部分群でなくても，G と H が同じ Sylow p-部分群 P をもつなら．$F_P(G)=F_P(H)$ となる状況が考えられる．上記の定理における例として，$p=3$，G と H をそれぞれ散在型単純群 J_4，Ru としたとき，Sylow p-部分群はともに $P\cong p_+^{1+2}$ であり，$F_P(G)=F_P(H)$ となる．

なお，上記の定理において例えば，$p=3$ の場合は，$P\cong p_+^{1+2}$ 上の fusion system は 15 個に分類される．

次に，別の P についても結果を紹介する．

定理 4 (Diaz-Ruiz-Viruel [3]). p を奇素数とし，P を rank 2 の p-群とする．このとき P 上の fusion system は分類される．

先ほどの定理の $P \cong p_+^{1+2}$ の結果に加えて，この定理では例えば $p=3$ で $P \cong (C_9 \times C_3) : C_3$ としたとき，$F_P(L_3(q)) = F_P(U_3(q'))$（ここで，$q \equiv 1 \mod 9$，$q' \equiv -1 \mod 9$）であるが，$F_P({}^3D_4(q''))$（ここで，$3 \nmid q''$）は別の fusion system として分類される．

他にも，P が指数 p の可換部分群 A を持つ場合についての fusion system の分類は，Oliver, Craven らによって研究が進められている [10].

また，Lie type の群 G と G' について，$F_P(G) = F_P(G')$ となる例についても，Broto，Møller, Oliver らによって研究されている [1].

3. Broué の perfect isometry 予想

まず有限群のブロックと指標に関するいくつかの定義をまとめる．(詳しくは [7] を参照.) G を有限群，p を素数とする．$\mathcal{O}$ を完備離散付値環とし，K は $\mathcal{O}$ の商体で標数 0，k は $\mathcal{O}$ の剰余体で標数 p とする．

群環 $\mathcal{O}G$ において 1 は直交する中心的原始べき等元の和として

$$1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t$$

と表され、$B_i = \varepsilon_i(\mathcal{O}G)$ とおけば $\mathcal{O}G$ の $(\mathcal{O}G, \mathcal{O}G)$-加群としての直既約分解

$$\mathcal{O}G = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_t \tag{1}$$

が得られる．このとき群 G に対し，式 (1) における各 B_i を G の (p-) **ブロック**とよび，その全体を $\mathrm{Bl}(G)$ と表す．また ε_i を B_i のブロックべき等元とよび，これを e_{B_i} と表す．

$B \in \mathrm{Bl}(G)$ とする．$\mathcal{O}G$-加群 V に対して $Ve_B = V$ が成り立つとき，V はブロック B に属するといい，$V \in B$ と書く．V が G の $\mathcal{O}$-表現 X の表現加群であるとき，V がブロック B に属するならば X あるいはその指標 χ_X は B に属するという．

群 G に対し、G の単位表現 1_G の属するブロックを G の主ブロックといい，$B_0(G)$ または単に B_0 とかく．G の通常既約指標の全体を $\mathrm{Irr}(G)$ と表し，$\mathrm{Irr}(B)$ でブロック B に属する G の既約指標の全体を表すとする．

部分群 $H \leq G$ に対して，$(\mathcal{O}G)^H := \{ x \in \mathcal{O}G \mid h^{-1}xh = x \ (\forall h \in H) \}$ と定義する．また，$K \leq H \leq G$ に対して，トレース写像を次のように定義する．

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Tr}_K^H : & (\mathcal{O}G)^K & \longrightarrow & (\mathcal{O}G)^H \\ & x & \longmapsto & \sum_{h \in K \backslash H} h^{-1}xh \end{array}$$

このとき，$B \in \mathrm{Bl}(G)$ に対し，$B \in \mathrm{ImTr}_P^G$ となる最小の p-部分群 P が G-共役を除いてただ一つ存在し，この P をブロック B の**不足群**とよぶ。

$H \leq G$ とし，B' を H のブロックで，不足群が P であるものとする．もし，$C_G(P) \leq H \leq N_G(P)$ ならば，B' の *Brauer* **対応**と呼ばれる G のブロック B が canonical に存在し，$B = B'^G$ と書く．(ここで，$C_G(P)$ は P の中心化群，$N_G(P)$ は P の正規化群を表す.)

このとき，G の表現とその p-部分群 P の正規化群 $N_G(P)$ の表現との関係を示す，次の定理が存在する．

定理 5 (Brauer's first main theorem). G の p-部分群 P に対し，Brauer 対応は G のブロックで P を不足群に持つものから，$N_G(P)$ のブロックで P を不足群に持つものへの全単射を与える．

ここで，perfect isometry の定義と，Broué の perfect isometry 予想について述べる．(詳しくは [2] を参照.) G, H を有限群とし，$B \in \mathrm{Bl}(G)$, $B' \in \mathrm{Bl}(H)$ とする．

$G \times H$ の一般指標 μ が次を満たすならば，μ は *perfect* であるという．

(a) $\mu(g,h) \neq 0$ ならば，g と h の位数はともに p と素であるか，あるいは，ともに p の倍数である．

(b) $\mu(g,h)/|C_G(g)| \in \mathcal{O}$ かつ $\mu(g,h)/|C_H(h)| \in \mathcal{O}$.

$G \times H$ のブロック $B \times B'$ に属する一般指標 μ が与えられたとき，写像 $I : \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B) \to \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B')$ を

$$I(\chi)(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\mu(g^{-1},h)\chi(g)$$

によって定義することができる．ここで，$\chi \in \mathrm{Irr}(B)$, $h \in H$ とする．

もし，μ が $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B)$ と $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B')$ 上の通常の内積に関する全単射な isometry を与えるとき，μ は B と B' の間の isometry を与えるという．さらに，μ が perfect であるとき，μ は B と B' の間の *perfect isometry* を与えるといい，B と B' は *perfect isometric* であるという．このとき，I を *perfect isometry* と呼ぶ．

これらの定義のもとで，Broué は次のような予想を提出した．

予想 6 (Broué's perfect isometry conjecture). B を G のブロックで不足群 P を持つものとし，B' を $N_G(P)$ のブロックで，B の Brauer 対応であるものとする．P が可換であるとき，B と B' は perfect isometric である．

ここでは，予想 6 で不足群が可換であるという条件があることに注意しよう．これは始めの定理で述べたように，$N_G(P)$ は P における G-fusion を control している状況である．しかし，不足群が非可換の場合，たとえ $N_G(P)$ が P における G-fusion を control していたとしても，一般には perfect isometry は存在しないことが知られている．例えば鈴木群 $Sz(8)$ の主 2-ブロックという有名な例があげられる．

4. 非可換不足群を持つブロックに関する予想

上記の予想に関してはこれまでに様々な結果が報告されており，現在も研究が進められているが，ここではあえて予想の条件から外れた不足群 P が非可換な場合に着目し，$N_G(P)$ は P における G-fusion を control している場合に，G と $N_G(P)$ の対応するブロックの関係について何が言えるのか，また，より一般に G と H が同じ Sylow p-部分群 P をもち，$F_P(G) = F_P(H)$ となる場合の対応するブロックの関係について考察していく．そのため，まず perfect isometry の"perfect"を少し弱めたような性質を新たに定義し，その条件を満たす isometry を考えてみる．その準備として，p-群に関係した不変量をいくつか定義する．

P を p-群とし，Q を P の正規部分群とする．$X(P;Q)$ と $V(P;Q)$ を以下のように定義する．

$$X(P;Q) = \{\ \theta \in \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(P) \mid \theta(g) = 0 \ \ \forall g \in P \setminus Q\ \}.$$

$$V(P;Q) = \{\ \sum_{\varphi \in \mathrm{Irr}(Q)} a_\varphi \varphi \uparrow^P \ \mid a_\varphi \in \mathbb{Z}\ \}.$$

$X(P;Q)$ と $V(P;Q)$ はともに P の一般指標の全体 $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(P)$ の $\mathbb{Z}$-部分加群であり，$V(P;Q) \subseteq X(P;Q)$ となる．さらに次のことが知られている．

補題 7. $p^c X(P;Q) \subseteq V(P;Q)$ となる非負整数 c が存在する．

ここで，P と Q に対し，$c(P;Q)$ を次で定義する．

定義 8. P を p-群，Q をその正規部分群とする．$p^c X(P;Q) \subseteq V(P;Q)$ となる非負整数 c のうち，最小のものを $c(P;Q)$ と書く．

次に，共通の p-部分群 P を持つ二つの有限群 G と H の直積 $G \times H$ を考える．

$$\Delta(P) = \{(x,x) \mid x \in P\} \ \leq G \times H$$

とし，次の量を定義する．

定義 9. $(g,h) \in G \times H$ に対し，S_1 と S_2 をそれぞれ $C_G(g)$ と $C_H(h)$ の Sylow p-部分群とする．このとき，$s_Q(g,h)$ を以下で定義する．

$$p^{s_Q(g,h)} = \min\{|S_1 \times S_2 : (S_1 \times S_2) \cap ((Q \times Q)\Delta(P))^{(x,y)}| \mid (x,y) \in G \times H\}$$

注意 10. $s_Q(g,h)$ は S_1 と S_2 の取り方に依存せず，g，h をそれぞれ g の G-共役，h の H-共役でおきかえても同じ値となる．

これらを用いて perfect isometry の一般化を考える．3 章と同じく，G，H は有限群，μ は $G \times H$ の一般指標とする．このとき，μ の性質として次のようなものを定義しよう．

定義 11. μ が *Q-perfect* であるとは，全ての $g \in G$，$h \in H$ に対し次が成り立つことを言う．

(A) $\mu(g,h) \neq 0$ ならば，$(g_p, h_p^{-1}) \in_{G\times H} (Q \times Q)\Delta(P)$.

(B) $(g_p, h_p) \in_{G\times H} Q \times Q$ となる (g,h) に対し，$p^{c(P;Q)}\mu(g,h)/p^{s_Q(g,h)}$ は $\mathcal{O}$ の元．そうでない (g,h) に対し，$\mu(g,h)/p^{s_Q(g,h)}$ は $\mathcal{O}$ の元．

（ここで，g_p とは g の p-部分を表す.）

もし，μ が B と B' の間の isometry I を与え，さらに，μ が Q-perfect であるとき，μ は B と B' の間の *Q-perfect isometry* を与えるといい，B と B' は *Q-perfect isometric* であるという．このとき，I を *Q-perfect isometry* と呼ぶ．

上記の一般化と合わせて，非可換不足群 P を持つブロックについて様々な計算を行った結果，ここでは予想 6 を拡張した次のような予想が考えられる．

予想 12. G と H を同じ Sylow p-部分群 P を持つ有限群とし，B，B' をそれぞれ G，H の主ブロックとする．さらに，$F_P(G) = F_P(H)$ とする．このとき，$Q \leq [P,P]$ を満たす適当な Q に対し，B と B' は Q-perfect isometric である．

ここで $[P,P]$ は P の交換子群とする．

予想 12 に関して，以下の結果がある．

定理 13 ([8]). p を素数，G を有限単純群とし，B はその主 p-ブロックで，不足群である Sylow p-部分群 P が trivial intersection であるものとする．B' は $N_G(P)$ の主 p-ブロックとする．このとき予想 12 は成り立つ．

注意 14. (i) P が trivial intersection ならば，$N_G(P)$ は P における G-fusion を control していることが知られている．

(iI) 証明は個々の群に関して Q-perfect isometry の存在を確認していき，また一部では群論計算プログラム GAP[11]，CHEVIE[5] を用いた．

(iiI) 不足群が非可換の場合 perfect isometry が存在しないことが知られている $Sz(8)$ の主 2-ブロックという例はこの定理に含まれ，$[P,P]$-perfect isometry の存在が確認できている．

また，次の場合にも予想 12 は成り立つ．

定理 15 (Narasaki, Uno [9]). p を素数，B は主 p-ブロックで不足群 $P=p_+^{1+2}$（位数 p^3，べき数 p の extra special p-群）とする．このとき予想 12 は成り立つ．

注意 16. Ruiz と Viruel による fusion system の分類に加えて，有限単純群の分類定理を用いて $F_P(G)=F_P(H)$ となる群を全てさがし，それぞれにおいて予想 12 が成り立つことを確認した．

最後に，perfect isometry の一般化としては，他にもいくつかの方法が提案されており，(例えば [4]，[6] を参照）これらの isometry と Q-perfect isometry との関連を検討しながら，非可換不足群を持つブロックについてさらに考察を深めてくことも，重要な検討課題である．

References

[1] C. Broto, J. Møller and B. Oliver, Equivalences between fusion systems of finite groups of Lie type, *J. Amer. Math. Soc.* **25** (2012), 1-20.

[2] M. Broué, Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées, Représentations Linéaires des Groupes Finis, Luminy, 1988, *Astérisque* **181-182** (1990), 61-92.

[3] A. Diaz, A. Ruiz and A. Viruel, All p-local finite groups of rank two for odd prime p, *Transactions of the american mathematical society* **359** (2007), 1725-1764.

[4] C. W. Eaton, Perfect generalized characters inducing the Alperin-McKay conjecture, *J. Algebra* **320** (2008), 2301-2327.

[5] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle and G.Pfeiffer, CHEVIE—Generic Character Table of Finite Groups of Lie Type, Hecke Algebras and Weyl Groups, *IWR-preprint*, Heidelberg, 1993.

[6] J-B. Gramain, Generalized perfect isometries in some groups of Lie rank one, *J. Algebra* **299** (2006), 820-840.

[7] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of Finite Groups*, Academic Press, New York (1987).

[8] R. Narasaki, Isometries for blocks with T.I. Sylow defect groups, under review.

[9] R. Narasaki and K. Uno, Isometries and extra special Sylow groups of order p^3, *J. Algebra* **322** (2009), 2027-2068.

[10] B. Oliver, Simple fusion systems over p-groups with abelian subgroup of index p : I, preprint.

[11] Martin Schönert et al., *GAP - Groups, Algorithms, and Programming*, Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, third ed., 1993.

[12] A. Ruiz, A. Viruel, The classification of p-local finite groups over the extraspecial group of order p^3 and exponent p, *Math. Z.* **248** (2004) 45–65.